Интерпретация данных Спин-Эхо малоуглового рассеяния нейтронов (СЭМУРН) на фрактальных объектах

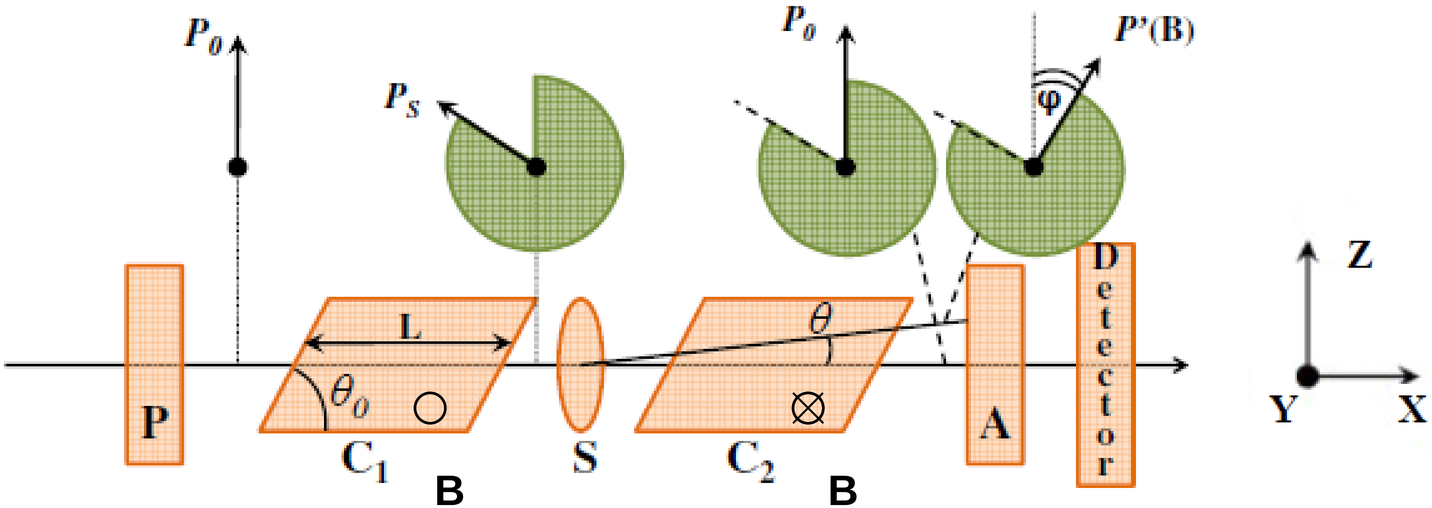
Яшина Е.Г., Григорьев С.В.

ПИЯФ НИЦ КИ
СПбГУ

31 октября 2014

Принципиальная схема эксперимента

$$P(\varphi) = P_0 \cos(\varphi)$$



$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = c\lambda BL\cot\theta_0(\theta_2 - \theta_1) = \mathrm{z}Q_z$$

$$\mathrm{z} = \frac{c\lambda^2 BL\cot\theta_0}{2\pi}, \qquad Q_z = \frac{2\pi}{\lambda}(\theta_2 - \theta_1)$$

Теория СЭМУРН

$$P_m I_m = P_0 I_{ns} + P_s * I_s$$

$$P_s * I_s = I_0 t \frac{1}{k_0^2} \int P_s(Q_z) \frac{d\sigma}{d\Omega(Q)} dQ_y dQ_z$$

$$P_s(Q_z) = P_0 \cos(\mathrm{z} Q_z)$$

$$\sigma = \frac{1}{k_0^2} \int \frac{d\sigma}{d\Omega(Q)} dQ_y dQ_z$$

$$(\sigma t \ll 1)$$

$$I_{ns} = I_0(1 - \sigma t) \text{ и } I_m = I_0$$

$$P_m = P_0(1 - \sigma t) + P_0 t \left(\frac{1}{k_0}\right)^2 \int \cos(\mathrm{z} Q_z) \frac{d\sigma}{d\Omega(Q)} dQ_y dQ_z$$

$$\boxed{G(\mathrm{z}) = \frac{1}{k_0^2} \int \cos(\mathrm{z} Q_z) \frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) dQ_y dQ_z \qquad P(\mathrm{z}) = e^{l\sigma(G(\mathrm{z})-1)}}$$

Корреляционная функция

$$G(\mathrm{z})$$

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(x, 0, z)\,dx \;=\; \frac{1}{k_0^2}\int \cos(\mathrm{z}Q_z)\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q)\,dQ_y\,dQ_z$$

$$\gamma(r) = \langle \textstyle\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}' \rangle$$

1) предположение о форме рассеивающего объекта

2) посчитать корреляционную функцию

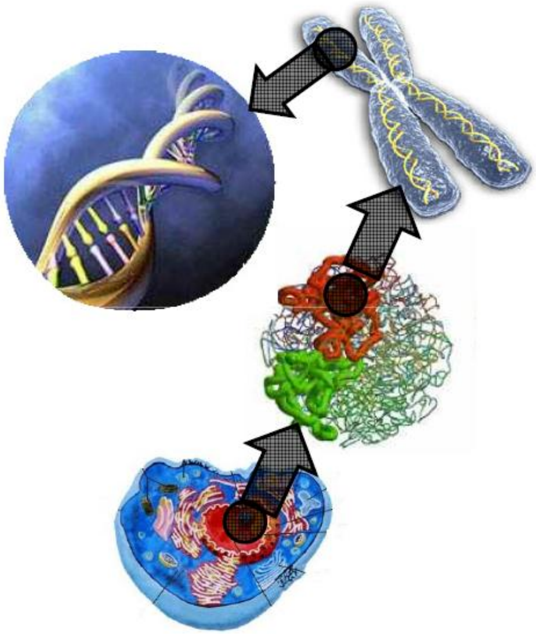
3) проекция этой функции на ось x.

1) Закон рассеяния(МУРН)

2) Интеграл от з.р. с весом Cos(zQ_z)

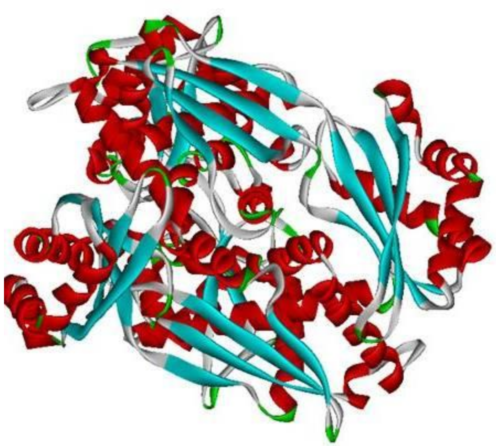
Krouglov, T., de Schepper, I. M., Bouwman, W. G. & Rekveldt, M. Th.(2003a). J. Appl. Cryst. 36, 117–124

Рассеяние на фрактальных объектах



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(Q) = \frac{A}{\left(Q^2 + \left(\frac{1}{\xi}\right)^2\right)^{D/2}}$$

$$\boxed{\xi Q > 1}$$



Корреляционная функция фрактального объекта

$$G(z)=\frac{A\xi^{D-2}}{\sigma k_0^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\cos\left(\frac{z}{\xi}(Q\xi)\cos(\varphi)\right)\frac{(Q\xi)d(Q\xi)d\varphi}{((\xi Q)^2+1)^{\frac{D}{2}}}$$

$$G(\tau)=\frac{\pi A\xi^{D-2}2^{2-\frac{D}{2}}}{\sigma k_0^2\Gamma(\frac{D}{2})}\left[\tau^{\frac{D}{2}-1}K_{\frac{D}{2}+1}(\tau)-\tau^{\frac{D}{2}-2}DK_{\frac{D}{2}}(\tau)\right]$$

$$\tau=\frac{z}{\xi}$$

$$K_\nu(\tau)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(k-\nu+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\right]$$

Объемные фракталы

$$1 \leqslant D \leqslant 3$$

$D_m = D$ - фрактальная размерность

D=4

$$G(\tau) = \frac{\pi A \xi^2}{\sigma k_0^2} \tau K_1(\tau)$$

D=3- граница между поверхностными и объемными фракталами

$$G(\tau) = \frac{2\pi \xi A}{\sigma k_0^2} \exp(-\tau)$$

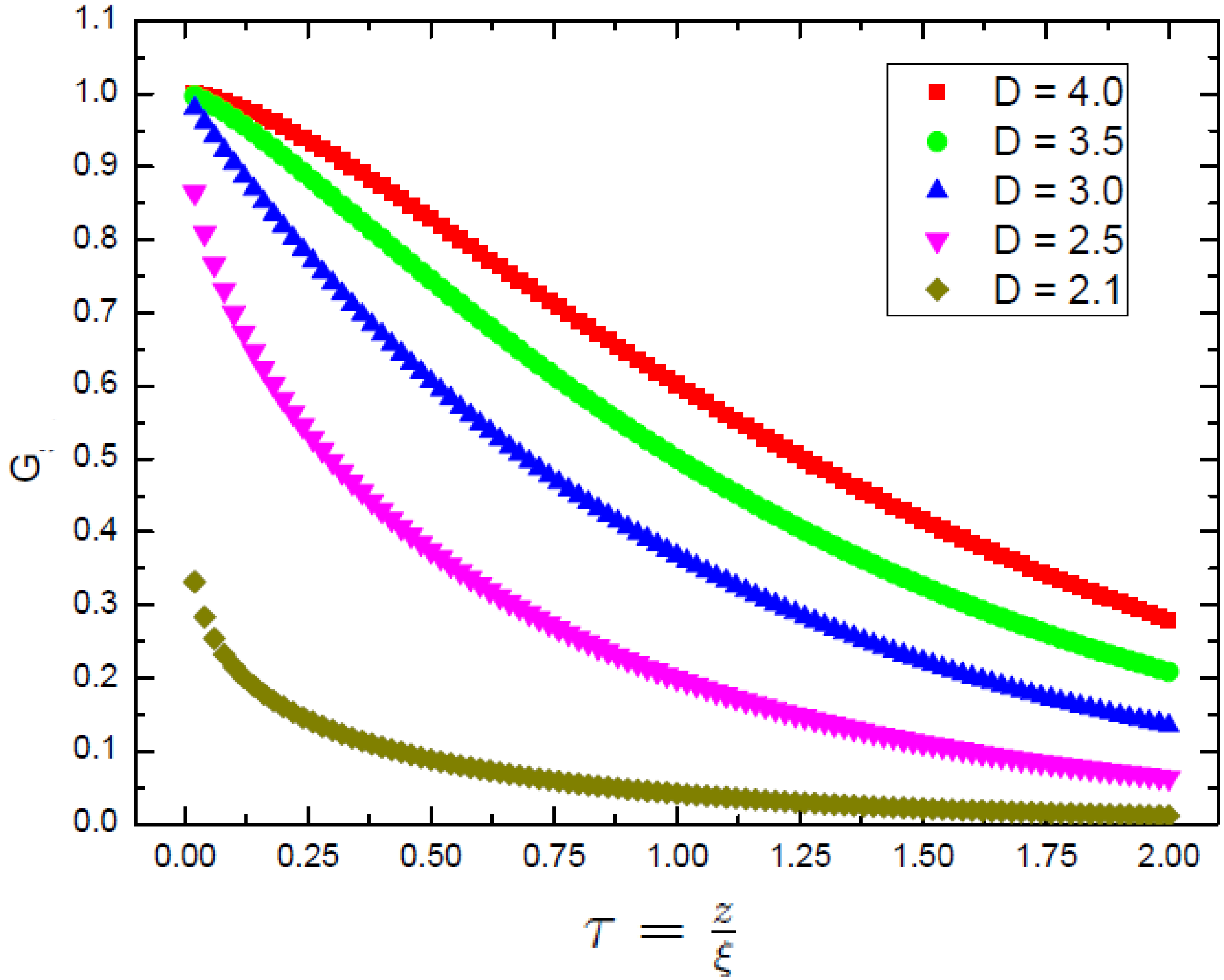
Поверхностные фракталы

$$3 < D = 6 - D_s \leqslant 4$$

D_s - фрактальная размерность поверхности

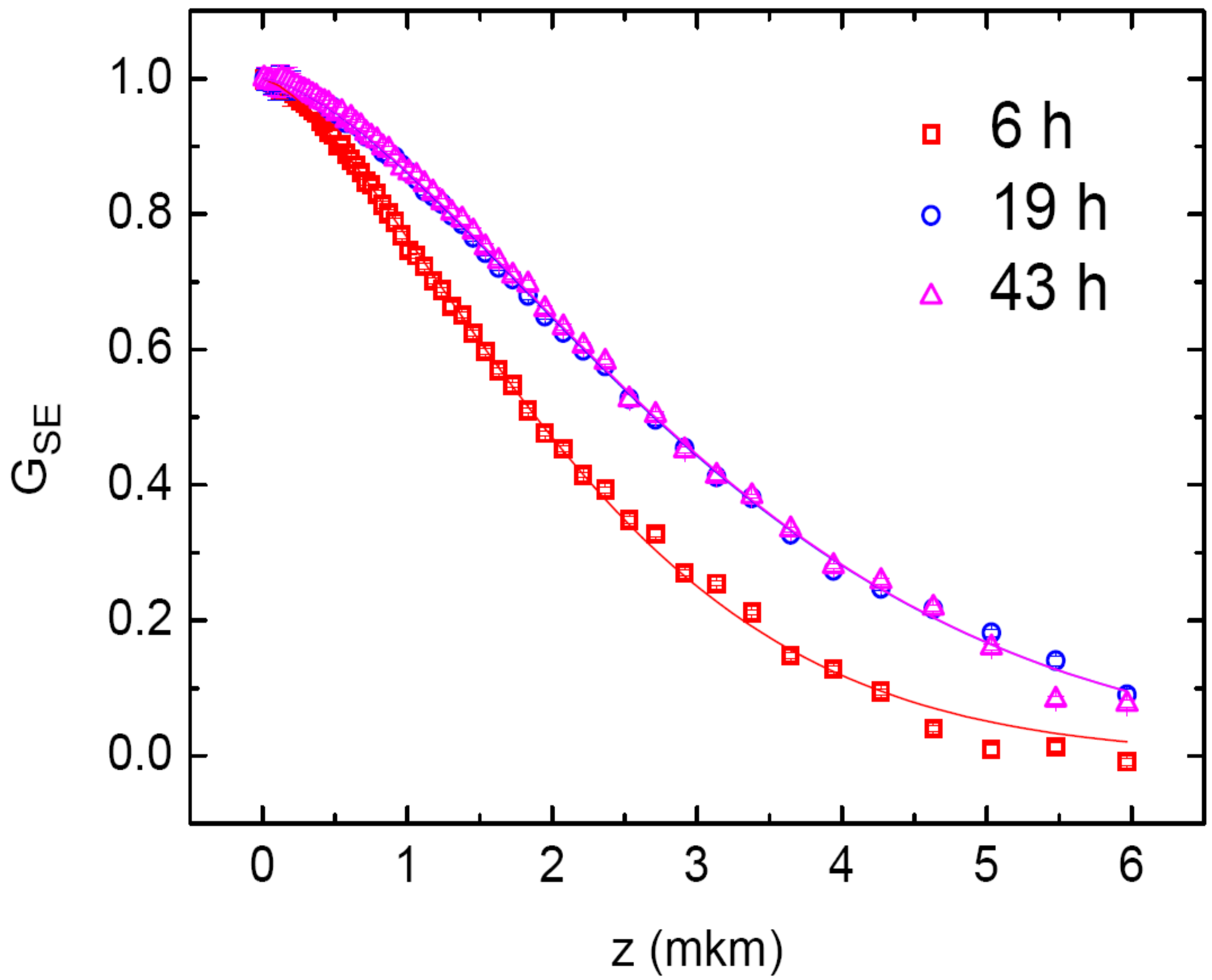
D=2

$$G(\tau) = \frac{\pi A 2}{\sigma k_0^2} K_0(\tau)$$



D = 4.0
D = 3.5
D = 3.0
D = 2.5
D = 2.1
G
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
$\tau = \frac{z}{\xi}$

СЭМУРН зависимости для керамических образцов (D=4)



Итог

Получено выражение для проекции корреляционной функции фрактального объекта.

Корреляционная функция в методе СЭМУРН определяется фрактальной степенью объекта.

$$G(\tau) \sim \tau^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}+1}(\tau) - \tau^{\frac{D}{2}-2} D K_{\frac{D}{2}}(\tau)$$

Благодарность

Григорьев Сергей Валентинович,
ПИЯФ НИЦ КИ, СПбГУ

Забенкин Владимир Николаевич,
ПИЯФ НИЦ КИ

Величко Евгений Владимирович,
СПбГУ, ПИЯФ НИЦ КИ

Павлов Константин Андреевич, СПбГУ, ПИЯФ НИЦ КИ

Спасибо за внимание!